Problemas de vectores

1.- Expresa el vector $\vec{m}$= (1, 2, 3) como combinación lineal de los vectores: $\vec{u}$= (1, 0, 1), $\vec{v}$= (1, 1, 0) y $\vec{w}$= (0, 1, 1).

2.- Siendo $\vec{u}$= (1, 0, 1), $\vec{v}$= (1, 1, 0) y $\vec{w}$= (0, 1, 1), demostrar que dichos vectores son linealmente independientes y expresa el vector $\vec{m}$= (1, 2, 3) como combinación lineal de dichos vectores.

3.- Dados los vectores $\vec{u}$= (1, 2, 3), $\vec{v}$= (2, 1, 0) y $\vec{w}$= (−1, −1, 0), demostrar que dichos vectores forman una base y calcula las coordenadas del vector (1, −1, 0) respecto de dicha base.

4.-Dados los vectores: (1, 1, 0), (1, 0, 1) y (0, 1, 1).

a) Demostrar que forman una base.

b) Hallar las coordenadas de los vectores de la base canónica respecto de esta base.

5.- Determinar el valor del parámetro k para que los vectores $\vec{x}$= k$\vec{u}$ − 2$\vec{v}$ + 3$\vec{w}$, $\vec{y}$= −$\vec{u}$ + k$\vec{v}$ + $\vec{w}$ sean:

a) Ortogonales.

b) Paralelos.

6.- Dados los puntos A(1, 0, 1), B(1, 1, 1) y C(1, 6, a), se pide:

a) Hallar para qué valores del parámetro *a* están alineados.

b) Hallar si existen valores de *a* para los cuales A, B y C son tres vértices de un paralelogramo de área 3 y, en caso afirmativo, calcularlos.

7.- Hallar dos vectores de módulo la unidad y ortogonales a (2, −2, 3) y (3, −3, 2).

8.- Hallar un vector perpendicular a $\vec{u} = (2, 3, 4)$ y $\vec{v} = (-1, 3, -5)$ y que sea unitario

9.- Dados los vectores $\vec{u} = (1, 2, 3)$ y $\vec{v} = (2, 0, 1)$, y $\vec{w} = (-1, 3, 0)$ hallar:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\vec{v} \cdot \vec{w}$, $\vec{u} \cdot \vec{w}$, $\vec{v} \cdot \vec{u}$.

b) $\vec{u} \times \vec{v}$, $\vec{u} \times \vec{w}$, $\vec{v} \times \vec{u}$, $\vec{v} \times \vec{w}$,

c) $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$, $(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{u}$,

d) $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$, $|\vec{w}|$,

e) $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ y $\cos(\widehat{\vec{v}, \vec{u}})$

10.- Dados los vectores $\vec{u} = (3, 1, -1)$ y $\vec{v} = (2, 3, 4)$ hallar:

a) Los módulos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$

b) El producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$

c) Un vector unitario ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$

d) El área del paralelogramo que tiene por lados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$

11.- Hallar el ángulo que forman los vectores $\vec{u}(1, 1, -1)$ y $\vec{v}(2, 2, 1)$

12.- Hallar los cosenos directores del vector $\vec{u}(2, 2, 1)$.

13.- Dados los vectores $\vec{u} = 3\,\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ y $\vec{v} = 2\,\vec{i} - 3\,\vec{j} + \vec{k}$, hallar el producto $\vec{u} \times \vec{v}$ y comprobar que este vector es ortogonal a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$. Hallar el vector $\vec{v} \times \vec{u}$ y compararlo con $\vec{u} \times \vec{v}$.

14.- Calcular el producto mixto: $[\vec{u} \times \vec{v}, \vec{v} \times \vec{w}, \vec{w} \times \vec{u}]$.

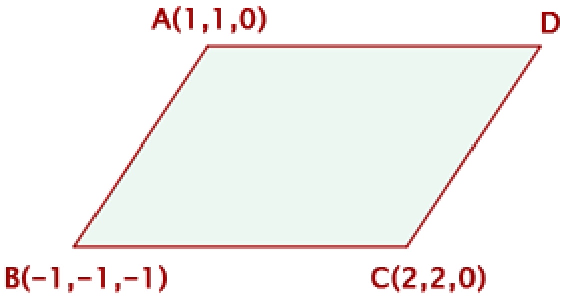
15.- Dados los vectores $\vec{u}\,(2, 1, 3)$ $\vec{v}\,(1, 2, 3)$, y $\vec{w}\,(-1, -1, 0)$, hallar el producto mixto $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$. ¿Cuánto vale el volumen del paralelepípedo que tiene por aristas los vectores dados?

16.- Sean A(−3, 4, 0), B(3, 6, 3) y C(−1, 2, 1) los tres vértices de un triángulo. Se pide:

a) Calcular el coseno de cada uno de los tres ángulos del triángulo.

b) Calcular el área del triángulo.

17.- Considerar la siguiente figura:



Se pide:

a) Coordenadas de D para qué ABCD sea un paralelogramo.

b) Área de este paralelogramo.

18.- Dados los puntos A(1, 0, 1), B(1, 1, 1) y C(1, 6, a), se pide:

a) Hallar para qué valores del parámetro *a* están alineados.

b) Hallar si existen valores de *a* para los cuales A, B y C son tres vértices de un paralelogramo de área 3 y, en caso afirmativo, calcularlos.

SOLUCIONES

1.- Expresa el vector $\vec{m}$= (1, 2, 3) como combinación lineal de los vectores: $\vec{u}$= (1, 0, 1), $\vec{v}$= (1, 1, 0) y $\vec{w}$= (0, 1, 1).

$$\vec{m} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$$

$$(1,2,3) = x(1,0,1) + y(1,1,0) + z(0,1,1)$$

$$(1,2,3) = (x+y, y+z, x+z)$$

$$\begin{cases} x+y=1 \\ y+z=2 \\ x+z=3 \end{cases} \qquad \begin{array}{r} 2x+2y+2z=6 \\ x+y+z=3 \end{array}$$

Sumamos miembro a miembro las tres ecuaciones y a la ecuación obtenida se le resta cada una de las ecuaciones.

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+y=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z=3 \\ y+z=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z=3 \\ x+z=3 \end{cases}$$

$z=2 \qquad x=1 \qquad y=0$

$$\vec{m} = \vec{u} + 2\vec{w}$$

2.- Siendo $\vec{u}$= (1, 0, 1), $\vec{v}$= (1, 1, 0) y $\vec{w}$= (0, 1, 1), demostrar que dichos vectores son linealmente independientes y expresa el vector $\vec{m}$= (1, 2, 3) como combinación lineal de dichos vectores.

$$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$$

$$a(1,0,1) + b(1,1,0) + c(0,1,1) = (0,0,0)$$

$$(a+b, b+c, a+c) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} a+b=0 \\ b+c=0 \\ a+c=0 \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

El sistema admite únicamente la solución trivial:

$a=0 \qquad b=0 \qquad c=0$

Por tanto, los tres vectores son **linealmente independientes**.

$$\vec{m} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$$

$$(1,2,3) = x(1,0,1) + y(1,1,0) + z(0,1,1)$$

$$(1,2,3) = (x+y, y+z, x+z)$$

$$\begin{cases} x+y=1 \\ y+z=2 \\ x+z=3 \end{cases} \qquad \begin{array}{r} 2x+2y+2z=6 \\ x+y+z=3 \end{array}$$

Sumamos miembro a miembro las tres ecuaciones y a la ecuación obtenida se le resta cada una de las ecuaciones.

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+y=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z=3 \\ y+z=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z=3 \\ x+z=3 \end{cases}$$

$$z=2 \qquad x=1 \qquad y=0$$

$$\vec{m} = \vec{u} + 2\vec{w}$$

3.- Dados los vectores $\vec{u}$= (1, 2, 3), $\vec{v}$= (2, 1, 0) y $\vec{w}$= (−1, −1, 0), demostrar que dichos vectores forman una base y calcula las coordenadas del vector (1, −1, 0) respecto de dicha base.

$$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$$

$$a(1,2,3) + b(2,1,0) + c(-1,-1,0) = (0,0,0)$$

$$(a+2b-c, 2a+b-c, 3a) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} a+2b-c=0 \\ 2a+b-c=0 \\ 3a=0 \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

El **sistema homogéneo** sólo admite la **solución trivial**:

$$a=0 \qquad b=0 \qquad c=0$$

Por tanto, los tres vectores son **linealmente independientes** y forman una **base**.

$$(1,-1,0) = x(1,2,3) + y(2,1,0) + z(-1,-1,0)$$

$$(1,-1,0) = (x+2y-z, 2x+y-z, 3x)$$

$$\begin{cases} x+2y-z=1 \\ 2x+y-z=-1 \\ 3x=0 \end{cases} \qquad x=0 \quad y=2 \quad z=3$$

Las **coordenadas del vector** (1, −1, 0) respecto a la **base** son: (0,2,3).

4.- Dados los vectores: (1, 1, 0), (1, 0, 1) y (0, 1, 1). **4.-Dados los vectores: (1, 1, 0), (1, 0, 1) y (0, 1, 1).**

a) Demostrar que forman una base.

Los **tres vectores** forman una **base** si son **linealmente independientes**.

$$a(1,1,0)+b(1,0,1)+c(0,1,1)=(0,0,0)$$

$$(a+b, a+c, b+C)=(0,0,0)$$

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a+c=0 \\ b+C=0 \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

En el **sistema homogéneo** el rango coincide con el número de incógnitas, por tanto tan sólo admite la solución trivial:

$$a=0 \qquad b=0 \qquad c=0$$

Los **vectores** son **linealmente independientes** y, por tanto, forma una **base**.

b) Hallar las coordenadas de los vectores de la base canónica **respecto de esta base.**

Las **coordenadas de los vectores** de la **base canónica** respecto de la base son:

$$(1,0,0)=a(1,1,0)+b(1,0,1)+c(0,1,1)$$

$$(1,0,0)=(a+b, a+c, b+c)$$

$$\begin{cases} 1=a+b \\ 0=a+c \\ 0=b+c \end{cases} \qquad \begin{aligned} 1 &= 2a+2b+2c \\ \frac{1}{2} &= a+b+C \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}=a+b+C \\ 1=a+b \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{1}{2}=a+b+C \\ 0=a+c \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{1}{2}=a+b+C \\ 0=b+c \end{cases}$$

$$(a,b,c)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

$$(0,1,0)=d(1,1,0)+e\ (1,0,1)+f(0,1,1)$$

$$(d,e,f)=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$$(0,0,1) = g(1,1,0) + h(1,0,1) + l(0,1,1)$$

$$(g,h,l) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

5.- Determinar el valor del parámetro k para que los vectores $\vec{x}$= k$\vec{u}$ − 2$\vec{v}$ + 3$\vec{w}$, $\vec{y}$= −$\vec{u}$ + k$\vec{v}$ + $\vec{w}$ sean:

a) Ortogonales.

Para que los **vectores** sean **ortogonales** su **producto escalar** tiene que ser igual a **cero**.

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \left(k\vec{u} - 2\vec{v} + 3\vec{w}\right)\left(-\vec{u} + k\vec{v} + \vec{w}\right) = -k - 2k + 3$$

$$-3k + 3 = 0 \qquad k = 1$$

b) Paralelos.

Para qué dos **vectores** sean **paralelos**, sus componentes tienen que ser **proporcionales**.

$$\frac{k}{-1} = \frac{-2}{k} = \frac{3}{1} \qquad \begin{cases} k^2 = 2 \\ k = -3 \end{cases}$$

El sistema no admite solución.

6.- Dados los puntos A(1, 0, 1), B(1, 1, 1) y C(1, 6, a), se pide:

a) Hallar para qué valores del parámetro *a* están alineados.

Si A, B y C están alineados los vectores $\overrightarrow{AB}$y $\overrightarrow{AC}$ tienen la **misma dirección**, por lo que son **linealmente dependientes** y tienen sus **componentes proporcionales**.

$$\overrightarrow{AB} = (1-1, 1-0, 1-1) = (0,1,0)$$

$$\overrightarrow{AC} = (1-1, 6-0, a-1) = (0,6,a-1)$$

$$(0,6,a-1) = k\,(0,1,0) \qquad a - 1 = 0 \qquad a = 1$$

b) Hallar si existen valores de *a* para los cuales A, B y C son tres vértices de un paralelogramo de área 3 y, en caso afirmativo, calcularlos.

El módulo del **producto vectorial** de los vectores $\overrightarrow{AB}$y $\overrightarrow{AC}$ es igual al **área del paralelogramo** construido sobre $\overrightarrow{AB}$y $\overrightarrow{AC}$

$$\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & a-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 6 & a-1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a-1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} \vec{k} = (a-1)\vec{i}$$

$$A = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = 3$$

$3 = \sqrt{(a-1)^2 + 0^2 + 0^2}$ $\qquad$ $9 = (a-1)^2$

$a - 1 = 3$ $\qquad$ $a = 4$ $\qquad$ $C(1, 6, 4)$

$a - 1 = -3$ $\qquad$ $a = -2$ $\qquad$ $C(1, 6, -2)$

7.- Hallar dos vectores de módulo la unidad y ortogonales a (2, −2, 3) y (3, −3, 2).

$$\vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} \vec{k} = 5\vec{i} + 5\vec{j}$$

$$|\vec{w}| = \sqrt{5^2 + 5^2 + 0} = 5\sqrt{2}$$

$$\vec{u} = \left(\frac{5}{5\sqrt{2}}, \frac{5}{5\sqrt{2}}, 0\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$\vec{v} = \left(\frac{-5}{5\sqrt{2}}, \frac{-5}{5\sqrt{2}}, 0\right) = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

8.- Hallar un vector perpendicular a $\vec{u} = (2, 3, 4)$ y $\vec{v} = (-1, 3, -5)$ y que sea unitario

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \vec{k} = -27\vec{i} + 6\vec{j} + 9\vec{k}$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{(-27)^2 + 6^2 + 9^2} = \sqrt{846}$$

$$\vec{w} = \left(\frac{-27}{\sqrt{846}}, \frac{6}{\sqrt{846}}, \frac{9}{\sqrt{846}}\right)$$

9.- Dados los vectores $\vec{u} = (1,2,3)$ y $\vec{v} = (2,0,1)$, y $\vec{w} = (-1,3,0)$ hallar:

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}$, $\vec{v}\cdot\vec{w}$, $\vec{u}\cdot\vec{w}$, $\vec{v}\cdot\vec{u}$.

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (1,2,3)\cdot(2,0,1) = 1\cdot 2 + 2\cdot 0 + 3\cdot 1 = 5$$

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = (2,0,1)\cdot(-1,3,0) = 2\cdot(-1) + 0\cdot 3 + 1\cdot 0 = -2$$

$$\vec{u}\cdot\vec{w} = (1,2,3)\cdot(-1,3,0) = 1\cdot(-1) + 2\cdot 3 + 3\cdot 0 = 5$$

$$\vec{v}\cdot\vec{u} = (2,0,1)\cdot(1,2,3) = 2\cdot 1 + 0\cdot 2 + 1\cdot 3 = 5$$

b) $\vec{u} \times \vec{v}$, $\vec{u} \times \vec{w}$, $\vec{v} \times \vec{u}$, $\vec{v} \times \vec{w}$,

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}\vec{k} = 2\vec{i} + 5\vec{j} - 4\vec{k}$$

$$\vec{u} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}\vec{k} = -9\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$$

$$\vec{v} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\vec{k} = -2\vec{i} - 5\vec{j} - 4\vec{k}$$

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}\vec{k} = -3\vec{i} - \vec{j} + 6\vec{k}$$

c) $(\vec{u} \times \vec{v})\cdot\vec{w}$, $(\vec{v} \times \vec{w})\cdot\vec{u}$,

$$(\vec{u} \times \vec{v})\cdot\vec{w} = (2,5,-4)\cdot(-1,3,0) = 13$$

$$(\vec{v} \times \vec{w})\cdot\vec{u} = (-3,-1,6)\cdot(1,2,3) = 13$$

d) $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$, $|\vec{w}|$,

$$|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$\left|\vec{w}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{10}$$

e) $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ **y** $\cos(\widehat{\vec{v}, \vec{u}})$

$$\cos\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) = \frac{5}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{5}} = 0.5976$$

$$\cos\left(\widehat{\vec{v}, \vec{w}}\right) = \frac{-2}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = -0.2828$$

10.- Dados los vectores $\vec{u} = (3, 1, -1)$ y $\vec{v} = (2, 3, 4)$ hallar:

a) Los módulos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$

$$\left|\vec{u}\right| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{11}$$

$$\left|\vec{v}\right| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (4)^2} = \sqrt{29}$$

b) El producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \vec{k} = 7\vec{i} - 14\vec{j} + 7\vec{k}$$

c) Un vector unitario ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$

$$\left|\vec{u} \times \vec{v}\right| = \sqrt{7^2 + 14^2 + 7^2} = \sqrt{294}$$

$$\vec{w} = \left(\frac{7}{\sqrt{294}}, \frac{-14}{\sqrt{294}}, \frac{7}{\sqrt{294}}\right)$$

d) El área del paralelogramo que tiene por lados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$

$$A = \left|\vec{u} \times \vec{v}\right| = \sqrt{294}\, u^2$$

11.- Hallar el ángulo que forman los vectores $\vec{u}(1, 1, -1)$ y $\vec{v}(2, 2, 1)$

$$\cos\alpha = \frac{2 + 2 - 1}{\sqrt{1+1+1}\sqrt{4+4+1}} = \frac{3}{3\sqrt{3}}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 54.74°$$

12.- Hallar los cosenos directores del vector $\vec{u}(2,2,1)$.

$$|\vec{u}| = \sqrt{2^2+2^2+1^2} = 3$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{3} \qquad \cos\beta = \frac{2}{3} \qquad \cos\gamma = \frac{1}{3}$$

13

13.- Dados los vectores $\vec{u} = 3\,\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ y $\vec{v} = 2\,\vec{i} - 3\,\vec{j} + \vec{k}$, hallar el producto $\vec{u}$ x $\vec{v}$ y comprobar que este vector es ortogonal a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$. Hallar el vector $\vec{v}$ x $\vec{u}$ y compararlo con $\vec{u}$ x $\vec{v}$.

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}\vec{k} = 2\vec{i} - \vec{j} - 7\vec{k}$$

$$\left(\vec{u}\times\vec{v}\right)\perp\vec{u} \qquad \left(\vec{u}\times\vec{v}\right)\cdot\vec{u} = 0$$

$$(2,-1,-7)\cdot(3,-1,1) = 6+1-7 = 0$$

$$\left(\vec{u}\times\vec{v}\right)\perp\vec{v} \qquad \left(\vec{u}\times\vec{v}\right)\cdot\vec{v} = 0$$

$$(2,-1,-7)\cdot(2,-3,1) = 4+3-7 = 0$$

$$\vec{v}\times\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}\vec{k} = -2\vec{i} + \vec{j} + 7\vec{k}$$

$$\vec{v}\times\vec{u} = -\left(\vec{u}\times\vec{v}\right)$$

14.- Calcular el producto mixto: $[\vec{u}$ x $\vec{v}\,, \vec{v}$ x $\vec{w}\,, \vec{w}$ x $\vec{u}\;]$.

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{v}\times\vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$$

$$\vec{w} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$$

$$\left(\vec{v} \times \vec{w}\right) \times \left(\vec{w} \times \vec{u}\right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 2\vec{j}$$

$$\left[\vec{u} \times \vec{v}, \vec{v} \times \vec{w}, \vec{w} \times \vec{u}\right] = \left(-\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\right)\left(-2\vec{i} - 2\vec{j}\right) = 4$$

15.- Dados los vectores $\vec{u}\,(2,1,3)$ $\vec{v}\,(1,2,3)$, y $\vec{w}\,(-1,-1,0)$, hallar el producto mixto $[\vec{u}\,,\vec{v}\,,\vec{w}\;]$. ¿Cuánto vale el volumen del paralelepípedo que tiene por aristas los vectores dados?

$$\left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right] = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 6$$

$$V = 6u^3$$

16.- Sean A(−3, 4, 0), B(3, 6, 3) y C(−1, 2, 1) los tres vértices de un triángulo. Se pide:

a) Calcular el coseno de cada uno de los tres ángulos del triángulo.

$$\overrightarrow{AB} = (3+3, 6-4, 3-0) = (6, 2, 3) \qquad \overrightarrow{BA} = (-6, -2, -3)$$

$$\overrightarrow{AC} = (-1+3, 2-4, 1-0) = (2, -2, 1) \qquad \overrightarrow{CA} = (-2, 2, -1)$$

$$\overrightarrow{BC} = (-1-3, 2-6, 1-3) = (-4, -4, -2) \qquad \overrightarrow{CB} = (4, 4, 2)$$

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) = \frac{12 - 4 + 3}{\sqrt{36+4+9}\,\sqrt{4+4+1}} = \frac{11}{21}$$

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}\right) = \frac{24 + 8 + 6}{\sqrt{36+4+9}\,\sqrt{16+16+4}} = \frac{38}{21}$$

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}\right) = \frac{-8 + 8 - 2}{\sqrt{4+4+1}\,\sqrt{16+16+4}} = \frac{-1}{9}$$

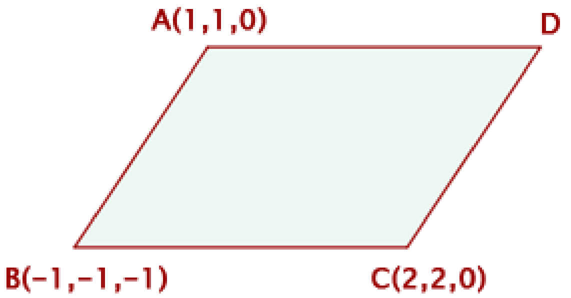
b) Calcular el área del triángulo.

$$A = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \vec{k} = -4\vec{i} - 16\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \sqrt{16 + 256} = 4\sqrt{17}$$

17.- Considerar la siguiente figura:



Se pide:

a) Coordenadas de D para qué ABCD sea un paralelogramo.

Por ser la figura un paralelogramo, los vectores $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{BC}$ son **equipolentes**.

$$(x-1, y-1, z) = (2+1, 2+1, 1)$$

$$x - 1 = 3 \qquad x = 4$$

$$y - 1 = 3 \qquad y = 4$$

$$z = 1$$

$$D(4, 4, 1)$$

b) Área de este paralelogramo.

$$A = \left|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BA}\right|$$

$$\overrightarrow{BC} = (3,3,1) \qquad \overrightarrow{BA} = (2,2,1)$$

$$\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BA} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} = \vec{i} - \vec{j}$$

$$A = \left|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BA}\right| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}\, u^2$$

18.- Dados los puntos A(1, 0, 1), B(1, 1, 1) y C(1, 6, a), se pide:

a) Hallar para qué valores del parámetro *a* están alineados.

Si A, B y C están alineados los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ tienen la **misma dirección**, por lo que son **linealmente dependientes** y tienen sus **componentes proporcionales**.

$$\overrightarrow{AB} = (1-1, 1-0, 1-1) = (0, 1, 0)$$

$$\overrightarrow{AC} = (1-1, 6-0, a-1) = (0, 6, a-1)$$

$$(0, 6, a-1) = k\,(0, 1, 0) \qquad a-1=0 \qquad a=1$$

b) Hallar si existen valores de *a* para los cuales A, B y C son tres vértices de un paralelogramo de área 3 y, en caso afirmativo, calcularlos.

El módulo del **producto vectorial** de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ es igual al **área del paralelogramo** construido sobre $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & a-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 6 & a-1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a-1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}\vec{k} = (a-1)\vec{i}$$

$$A = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = 3$$

$$3 = \sqrt{(a-1)^2 + 0^2 + 0^2} \qquad 9 = (a-1)^2$$

$$a-1 = 3 \qquad a = 4 \qquad C(1, 6, 4)$$

$$a-1 = -3 \qquad a = -2 \qquad C(1, 6, -2)$$